Institut National Polytechnique

Cycle Préparatoire - 1ère année

Examen de Mécanique 1 du 2 mars 2010, durée : 1 h 30

Aucun document n'est autorisé ; les calculatrices sont interdites.

On rappelle que les correcteurs sont sensibles à la lisibilité des copies, à l'orthographe ainsi qu'au style, lequel, en aucun cas, ne doit être télégraphique. En outre, conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras.

A Question de cours (6 points)

i) Soit un point M de masse m dans un référentiel R (O, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$) galiléen. Donner le moment cinétique de M, animé d'une vitesse $\boldsymbol{v}$(M/R) par rapport à un point A. A partir de cette expression, en déduire le théorème du moment cinétique.

ii) Comment s'exprime la relation fondamentale de la dynamique appliqué à un point M dans un référentiel non galiléen ? Tous les différents termes introduits devront être explicités.

iii) Rappeler les théorèmes de l'énergie cinétique puis de l'énergie mécanique en explicitant tous les termes introduits.

B. Problème : impact d'un astéroïde sur une planète du système solaire (d'après AJP, août 2006) (14 points)

On considère un astéroïde ponctuel A, de masse m, s'approchant d'une planète, de centre P, de masse M, avec une vitesse $\mathbf{v}_i$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, d'origine P et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic (voir figure 1) $\mathbf{v}_i$ est la vitesse initiale de A lorsque A est infiniment éloigné de P. On désigne par b_i le paramètre d'impact, distance BP. L'influence du Soleil et des autres planètes est négligeable. En outre, le rapport des masses m/M est très inférieur à l'unité, de telle sorte que ce problème à deux corps peut se ramener à celui de A dans $\mathcal{R}$.

1. Pourquoi le mouvement de A au voisinage du centre P de la planète est-il plan ?

2. a) Quelle est, en fonction de la distance $r = PA$, l'expression de l'énergie potentielle de gravitation de A, due à l'influence de P ? On prendra comme origine la position initiale de A infiniment éloigné de P.

b) Exprimer, en la justifiant, la loi de conservation de l'énergie mécanique. En déduire une relation entre la vitesse v de A, sa vitesse initiale v_i et r.

3. a) L'énergie ϵ de l'astéroïde étant suffisante, sa trajectoire est une hyperbole. Commenter qualitativement ce résultat.

b) On rappelle que, dans le problème à deux corps, l'équation polaire de la trajectroire conique de la particule fictive a pour expression :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \pi)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{L^2}{\mu|-GMm|} \quad \text{et} \quad e = \left(1 + \frac{2\epsilon L^2}{\mu G^2 M^2 m^2}\right)^{1/2}$$

En outre, la conservation du moment cinétique donne $L = m\ v_i\ b_i$. Donner la signification et le nom des différents termes utilisés p, e, et μ. Sachant que $m/M \ll 1$, exprimer p et e en fonction de v_i, b_i et M.

T.S.V.P

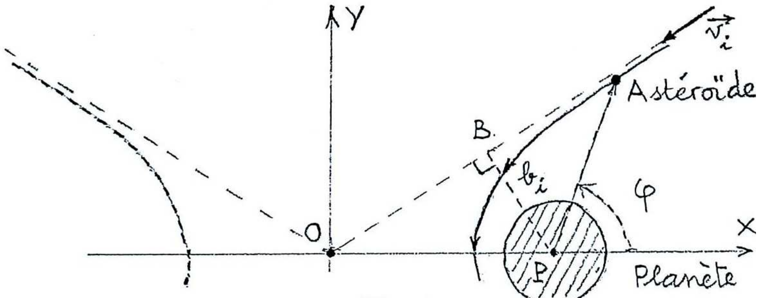

Fig. 1

c) Dans le système d'axes cartésiens Oxy de la figure, l'équation de l'hyperbole précédente s'écrit $X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1$. La distance séparant les foyers symétriques des deux branches d'hyperbole vaut alors $2c$ avec $c^2 = a^2 + b^2$. On donne les relations suivantes :

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} \quad \text{et} \quad c = ea = \frac{pe}{e^2 - 1}$$

En déduire b en fonction de p et e.

4. a) Exprimer la distance minimale r_{min} (périgée) entre les points P et A, en fonction de p et de e.

b) En déduire une nouvelle écriture de l'équation polaire de la trajectoire, ainsi que les expressions de a, b et c en fonction de r_{min} et e.

c) En utilisant les propriétés du triangle rectangle PBO, montrer que b_i s'identifie à b.